Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 11/06/2020

1) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & se \quad x > 0 \\ \frac{x^2+2}{x+1} - 2 & se \quad x \le 0 \end{cases} .$$

risulta continua nel punto $x_0 = 0$?

2) È data la funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} .$$

Determinare se $x_0 = -\frac{4}{3}$ risulta punto di massimo relativo o di minimo relativo.

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \log \left| \frac{x-1}{x-3} \right| .$$

4) Calcolare

$$\int x(1 + \tan^2(x))\, dx .$$

Soluzione

1) Calcolando i limiti

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x^2+2}{x+1} - 2\right) = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

e risultando $f(0) = 0$, si deduce che la funzione risulta continua in $x_0 = 0$.

2) Si calcola la derivata della funzione data ottenendo

$$f'(x)\frac{\sqrt{4-x^2} - (x+3)\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{4+3x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}} .$$

La derivata si annulla per $x = -4/3$ e risulta positiva per $x > -4/3$ e negativa per $x < -4/3$.
Quindi il punto $x_0 = -4/3$ risulta punto di minimo relativo (e assoluto) per la funzione $f(x)$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali l'argomento del logaritmo risulta definito e positivo. Per questi motivi si ha

$$D = (-\infty, 1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty) .$$

4) Si integra per parti

$$\begin{aligned}\int x(1+\tan^2(x))\,dx &= x\tan(x) - \int \tan(x)\,dx \\ &= x\tan(x) - \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx \\ &= x\tan(x) + \log|\cos(x)| + C\end{aligned}$$